Formale Methoden

Daniel Leese CNB

24. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Mengenlehre

Kapitel 1

Definition von Mengen

Def.:

> Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohldefinierter Objekte der Anschauung oder Denkens zu einer Gesamtheit. Diese Objekte werden Elemente genannt.

Die obere Definition der (naiven) Mengenlehre nach Cantor gilt nur im endlichen Bereich, nicht im unendlichen (Siehe Russel: Menge aller Mengen, die auch sich selbst enthält).

Anmerkung: Die hier verwendeten Diagramme nennt man Venn-Diagramme

1.1 Aufzählende Form einer Menge

$M = \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 1, 2, 3, 4\}$ Es handelt sich beide male um eine Menge mit 4 Elementen, dopelte Aufgezähltes wird ignoriert.

1.2 Elementbeziehung

$1 \in M$	1 ist Element der Menge M
$5 \notin M$	5 ist kein Element der Menge M

1.3 Leere Menge

Darstellung: $\emptyset$ oder $\{\}$

1.4 Beschreibende Form

Dient zum Beschreiben einer Menge ohne jedes einzelne Element anzugeben (oftmals unpraktisch oder gar unmöglich).
$\mathbb{L} = \{x|x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 = 1\}$
Die Elemente der Menge $\mathbb{L}$ sind also 1 und -1 $\qquad \mathbb{L} = \{1, -1\}$

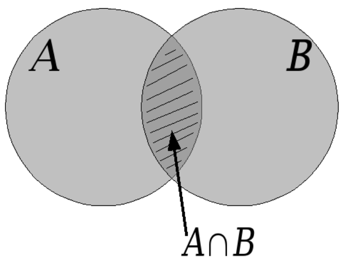
Allgemein:
$M = \{x|x$ ist Element einer Grundmenge **und** x hat Eigenschaft $E\}$

Weitere mögliche Zeichen für und sind $\wedge$ und ,

1.5 Operationen bei Mengen

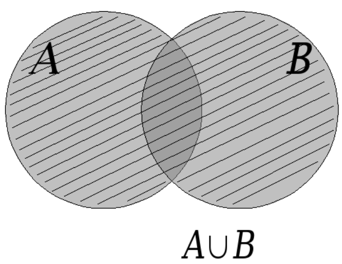
1.5.1 Schnittmenge

$A \cap B = \{x|x \in A \text{ und } x \in B\}$ $\qquad \cap$ = Geschnitten, und



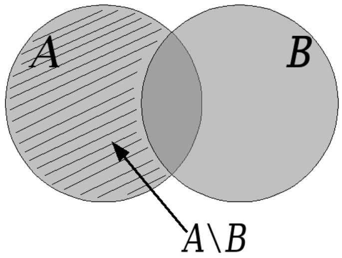
1.5.2 Vereinigungsmenge

$A \cup B = \{x|x \in A \text{ oder } x \in B\}$ $\qquad \cup$ = Vereinigt, oder. Merkhilfe: Sieht aus wie ein U $\rightarrow$ Eng. Union, Vereinigung. **Nicht** und



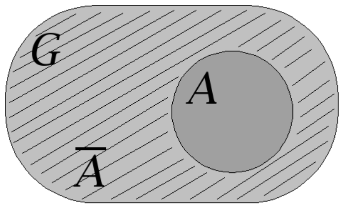
1.5.3 Differenzmenge

$A \backslash B = \{x|x \in A \text{ und } x \notin B\}$



1.5.4 Komplementmenge

$\overline{A^G} = \overline{A} = \{x|x \in G \text{ und } x \notin A\}$ Grundmenge G ohne Menge A. Das G in $\overline{A^G}$ kann weggelassen werden wenn die Grundmenge offensichtlich ist.



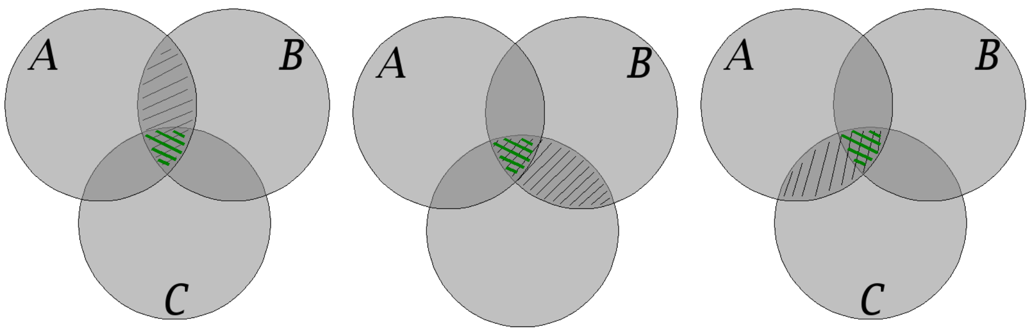
1.6 Elementare Eigenschaften

1.6.1 Kommutativgesetz

$A \cap B = B \cap A$

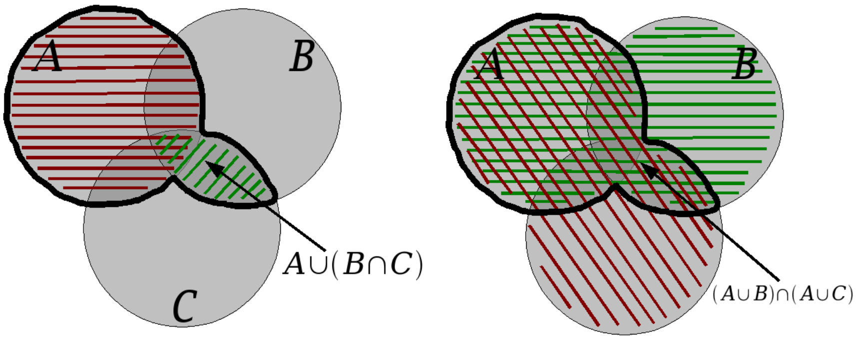
1.6.2 Assoziativgesetz

$(A \cap B) \cap C = (B \cap C) \cap A = (A \cap C) \cap B$



1.6.3 Distributivgesetz

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



1.6.4 Idempotenzgesetz

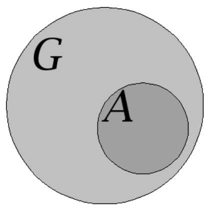
$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A$

1.6.5 Absortionsgesetz

$A \cap (A \cup B) = A, \qquad A \cup (A \cap B) = A$

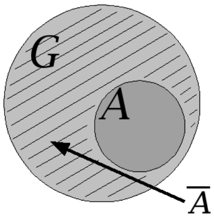
1.6.6 Neutrales Element

Auch Eigenschaften von 0 und 1 genannt
$A\cup\emptyset = A, \qquad A\cap\emptyset=\emptyset$
Folgendes gilt nur wenn z.b. A eine Untermenge von G ist, siehe Abbildung:
$A \cap G = A, \qquad A \cup G = G$



1.6.7 Komplementgesetz

$A \cap \overline{A} = \emptyset$, $\quad A \cup \overline{A} = G \quad$ G = Grundmenge

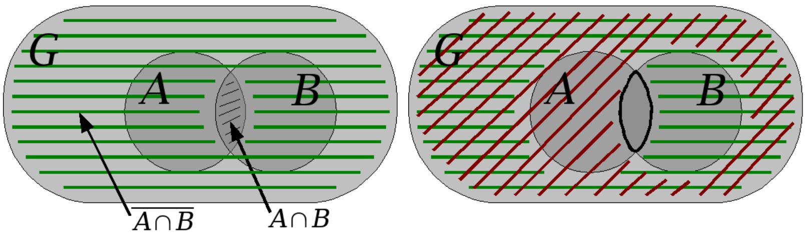


1.6.8 Dopeltes Komplement

$\overline{\overline{A}} = A$

1.6.9 De Morgan Regel

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$



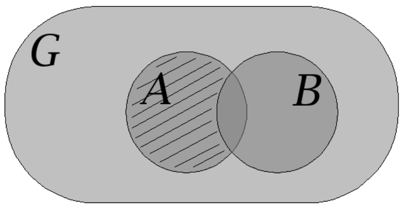
Erklärung über Wahrheitstabelle:

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

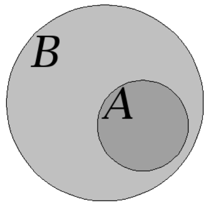
$0 \hat{=} x \notin$
$1 \hat{=} x \in$

1.6.10 Die Geheimnisvolle namenlose Regel

$A \backslash B = A \cap \overline{B^G}$ Die Differenzmenge (A ohne B) entspricht der Schnittmenge von A mit der Komplementmenge von B.



1.7 Teilmengen



$A \subseteq B$ A ist Teilmenge von B
$A \subset B$ A ist echte Teilmenge von B
$A \geq B$ A ist Obermenge von B
$A = B <=> A \leq B$ und $B \leq A$